10η Άσκηση

2022-2023

Έως την έννοια της παραγώγου

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$
- $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f^2(x)\,\eta\mu(\eta\mu x)}{x^2}, & x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ \alpha, & x=0\end{cases}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=4$.

δ) Έστω η συνάρτηση $h:(-1,1)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)\le 2h(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $h'(0)=2$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)+g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2-x^2\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$. Τότε $\lim_{x\to 0} g(x)=2$. Επίσης για κάθε $x\neq 0$ έχουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$ και αφού f συνεχής τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(xg(x))\Leftrightarrow f(0)=0$. Άρα $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$.

β) Αφού η g είναι συνεχής είναι $\lim_{x\to 0} g(x)=g(2)$.

$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)\,\eta\mu(\eta\mu x)}{x^2}==\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=0$ γιατί $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

Άρα είναι $\lim_{x\to 0} g(x)=0\Leftrightarrow g(0)=0\Leftrightarrow \alpha=0$

γ) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)\,\eta\mu(\eta\mu x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=4$

Άρα είναι $g'(0)=4$.

δ) Για $x=0$ στην ανισότητα είναι $2f(0)\le 2h(0)\le g(0)\Leftrightarrow 0\le 2h(0)\le 0\Leftrightarrow h(0)=0$

Για κάθε $-1<x<0$ είναι $2f(x)\le 2h(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)\le h(x)\le\frac{g(x)}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\ge\frac{h(x)}{x}\ge\frac{g(x)}{2x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2$

Για κάθε $0<x<1$ είναι $2f(x)\le 2h(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)\le h(x)\le\frac{g(x)}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\le\frac{h(x)}{x}\le\frac{g(x)}{2x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2$

Είναι $\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0\Leftrightarrow h'(0)=2$.

ε) i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)+g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(2x)}{x}+\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)=6$ γιατί $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}\overset{2x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\left(2\frac{f(u)}{u}\right)=2f'(0)=4$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\overset{\frac{x}{2}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{g(u)}{u}\right)=\frac{1}{2}g'(0)=2$.

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2-x^2\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2\eta\mu^2 x}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{|x||f(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{|x|^2\,\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{|f(x)|}{|x|\eta\mu^2 x}+\frac{g(\eta\mu x)}{|x|^2\,\eta\mu x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left|\frac{f(x)}{x}\right|\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{g(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{|x|^2}\right)=|f'(0)|(+\infty)+g'(0)(+\infty)=+\infty$$ γιατί είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=2$,

$\lim_{x\to 0}(\eta\mu^2 x)=0$ και $\eta\mu^2 x>0$ κοντά στο μηδέν άρα $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{g(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{g(u)}{u}=g'(0)=4$

και $\lim_{x\to 0}|x|^2=0$ και $|x|^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|^2}=+\infty$.